## 5　関数とグラフ

**39**

**(1)**

$f(x)=(x-a)^2-a^2+a+2\ (0\leq x\leq 3)$ より，

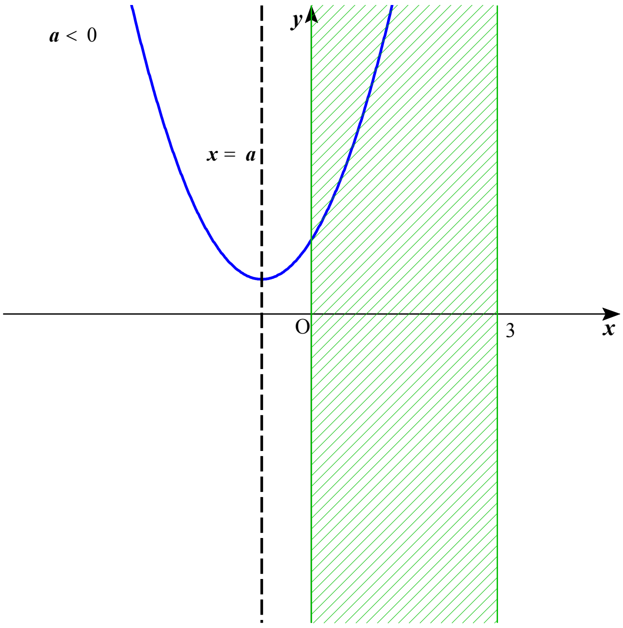
軸 $x=a$ について，

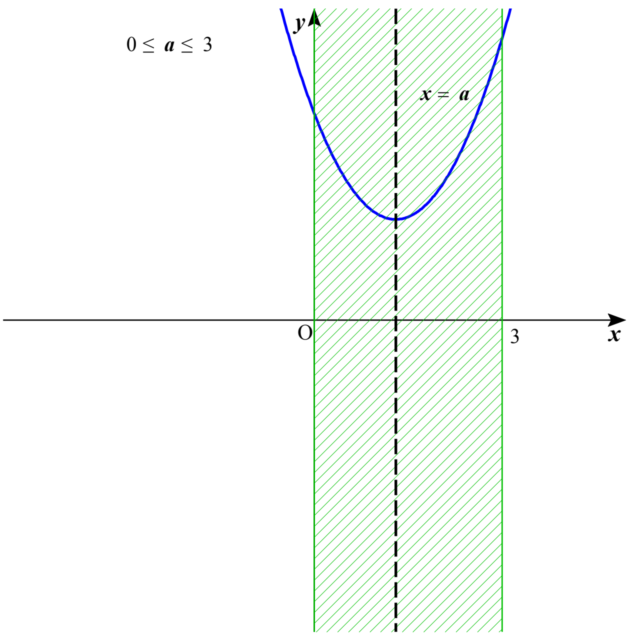
$a<0$ のとき　$m=f(0)=a+2$

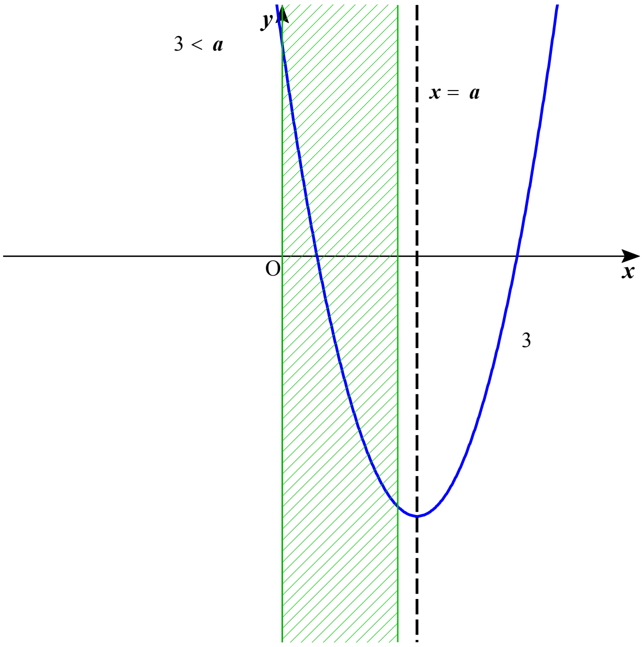
$0\leq a\leq 3$ のとき　$m=f(a)=-a^2+a+2$

$3<a$ のとき　$m=f(3)=-5a+11$

参考図



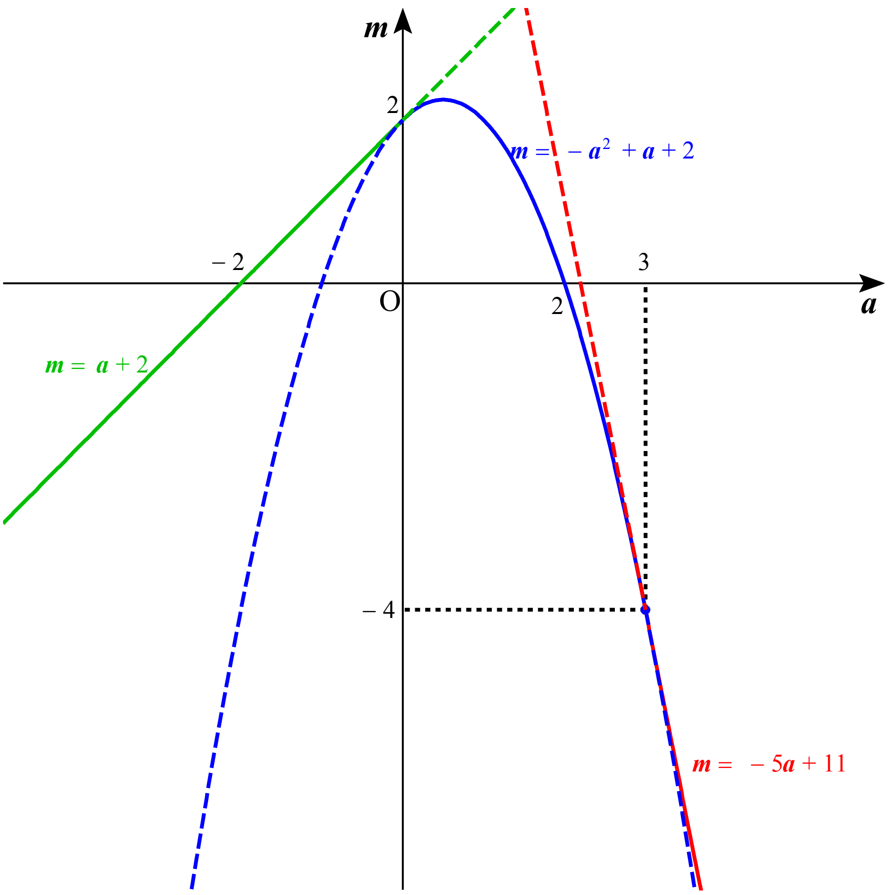






**(2)**

(1)をグラフで表すと下図のようになる。

よって，$-2 < a < 2$



**40**

**(1)**

$f(x)=(x-2)^2+a-4\ (a\le x\le a+1)$ より，

軸 $x=2$ について

$a+1<2$ すなわち $a<1$ のとき：$g(a)=f(a+1)=a^2-a-3$

$a\le 2\le a+1$ すなわち $1\le a\le 2$ のとき：$g(a)=f(2)=a-4$

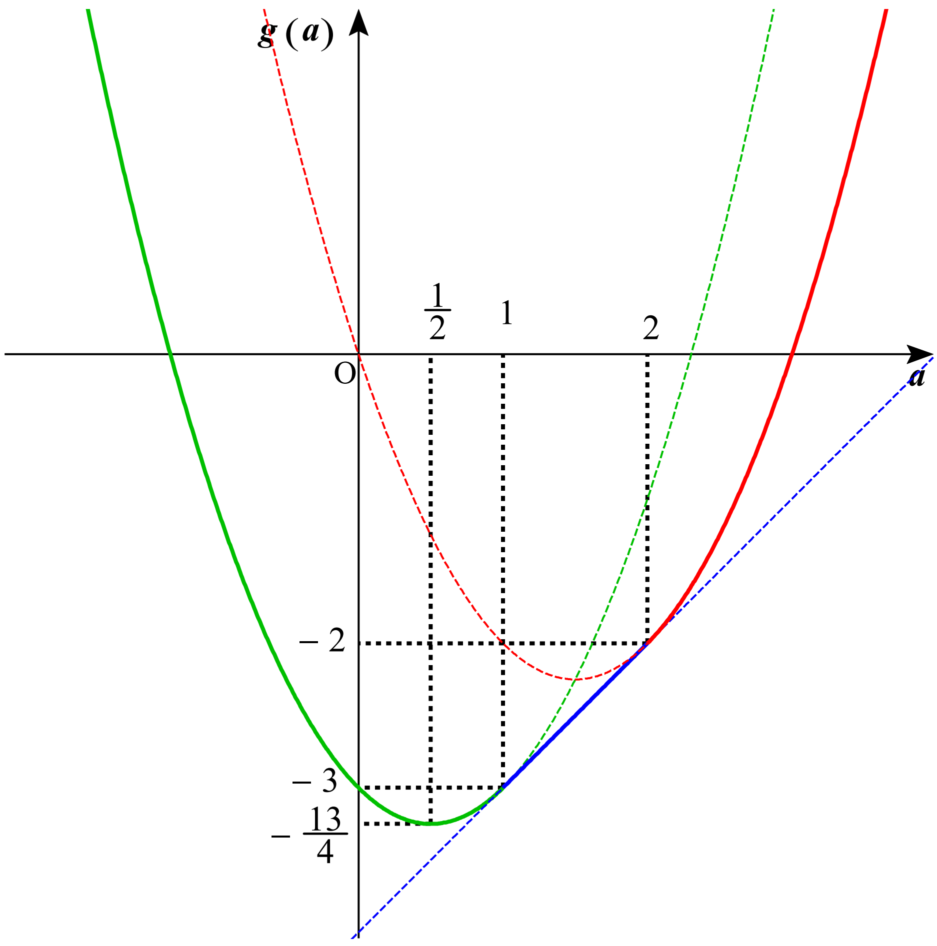
$2<a$ のとき：$g(a)=f(a)=a^2-3a$

**(2)**

(1)より，$g(a)=\begin{cases}\left(a-\dfrac{1}{2}\right)^2-\dfrac{13}{4} & (a<1)\\ a-4 & (1\le a\le 2)\\ \left(a-\dfrac{3}{2}\right)^2-\dfrac{9}{4} & (2<a)\end{cases}$

よってグラフは下図のようになる。

ゆえに，$g(a)$ は $a=\dfrac{1}{2}$ で最小値 $-\dfrac{13}{4}$ をとる。



**41**

$$f(x)=\{x(x-4)\}\{(x-1)(x-3)\}$$
$$=(x^2-4x)\{(x^2-4x)+3\}$$

ここで，$t=x^2-4x$ とおくと，

$t=(x-2)^2-4$，$0\leq x\leq 4$ より，$-4\leq t\leq 0$

また，

$$(x^2-4x)\{(x^2-4x)+3\}=t(t+3)$$
$$=\left(t+\frac{3}{2}\right)^2-\frac{9}{4}$$

より，$g(t)=\left(t+\frac{3}{2}\right)^2-\frac{9}{4}\quad(-4\leq t\leq 0)$ とおくと，

$g(t)$ は $t=-4$ で最大値 4，$t=-\frac{3}{2}$ で最小値 $-\frac{9}{4}$ をとる。

$t=-4$ のとき

$-4=x^2-4x$ より，$x^2-4x+4=0\quad \therefore x=2$

$t=-\frac{3}{2}$ のとき

$-\frac{3}{2}=x^2-4x$ より，$2x^2-8x+3=0\quad \therefore x=\frac{4\pm\sqrt{10}}{2}$

よって，$f(x)$ は $x=2$ で最大値 4，$x=\frac{4\pm\sqrt{10}}{2}$ で最小値 $-\frac{9}{4}$ をとる。

**42**

**(1)**

$$与式=4x^2-4(3y-1)x+12y^2-18y+7$$
$$=4\{x^2-(3y-1)x\}+12y^2-18y+7$$
$$=4\left(x-\frac{3y-1}{2}\right)^2-(3y-1)^2+12y^2-18y+7$$
$$=4\left(x-\frac{3y-1}{2}\right)^2+3y^2-12y+6$$
$$=4\left(x-\frac{3y-1}{2}\right)^2+3(y-2)^2-6$$

より，

$x-\frac{3y-1}{2}=0$ かつ $y-2=0$ すなわち $x=\frac{5}{2}$，$y=2$ で最小値 $-6$ をとる。

**(2)**

$y=x+1$ のとき

$$\text{左辺}=4\left(x-\frac{3y-1}{2}\right)^2+3(y-2)^2-6$$
$$=4\left\{x-\frac{3(x+1)-1}{2}\right\}^2+3\{(x+1)-2\}^2-6$$
$$=4\left(-\frac{x}{2}-1\right)^2+3(x-1)^2-6$$
$$=(-x-2)^2+3(x-1)^2-6$$
$$=(x+2)^2+3(x-1)^2-6$$
$$=4x^2-2x+1$$
$$=4\left(x-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{3}{4}>0$$

よって，不適

$y=x-1$ のとき

$$\text{左辺}=4\left(x-\frac{3y-1}{2}\right)^2+3(y-2)^2-6$$
$$=4\left\{x-\frac{3(x-1)-1}{2}\right\}^2+3\{(x-1)-2\}^2-6$$
$$=4\left(-\frac{x}{2}+2\right)^2+3(x-3)^2-6$$
$$=(-x+4)^2+3(x-3)^2-6$$
$$=(x-4)^2+3(x-3)^2-6$$
$$=4x^2-26x+37$$
$$=4\left(x-\frac{13}{4}\right)^2-\frac{21}{4}$$

より，

整数 $x$ が $\frac{13}{4}\left(=3+\frac{1}{4}\right)$ に近づくほど負の数 $a$ は小さくなる。

$x=3$ のとき

$a=-5$

$x=4$ のとき

$a=-3$

$x=2$ のとき

$a=1$

よって， $x=4,\ y=3$ のとき負の数 $a$ は最大値 $-3$ をとる。

**43**

$\boxed{ア}$

$$z=\frac{-x^2+xy+y^2}{x^2+xy+y^2}$$
$$=\frac{x^2\left\{-1+\frac{y}{x}+\left(\frac{y}{x}\right)^2\right\}}{x^2\left\{1+\frac{y}{x}+\left(\frac{y}{x}\right)^2\right\}}$$
$$=\frac{\left(\frac{y}{x}\right)^2+\frac{y}{x}-1}{\left(\frac{y}{x}\right)^2+\frac{y}{x}+1}$$
$$=\frac{k^2+k-1}{k^2+k+1}$$

$\boxed{イ}$

**解法 1**

$$z=\frac{k^2+k-1}{k^2+k+1}$$
$$=\frac{(k^2+k+1)-2}{k^2+k+1}$$
$$=1-\frac{2}{k^2+k+1}$$
$$=1+\left\{-\frac{2}{\left(k+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\right\}$$

ここで，$\left(k+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\geq\frac{3}{4}$ より，$\frac{2}{\left(k+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\leq\frac{2}{\frac{3}{4}}=\frac{8}{3}$　$\therefore -\frac{2}{\left(k+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\geq-\frac{8}{3}$

よって，$z=1-\left\{\frac{2}{\left(k+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\right\}\geq1+\left(-\frac{8}{3}\right)=-\frac{5}{3}$

ゆえに，$z$ の最小値は$-\frac{5}{3}$

**解法 2**

$z=\dfrac{k^2+k-1}{k^2+k+1}$ の両辺に $k^2+k+1$ を掛けると，$z\left(k^2+k+1\right)=k^2+k-1$

両辺を $k$ について整理することにより，$(z-1)k^2+(z-1)k+z+1=0$

これを $k$ についての方程式とし，

この方程式について，

$z=1$ のとき

$(z-1)k^2+(z-1)k+z+1\neq 0$

よって，不適

$z\neq 1$ のとき

実数 $k$ が存在するためには，判別式を $D$ とすると，実数解条件より，

$$\begin{aligned} D&=(z-1)^2-4(z-1)(z+1)\\ &=(z-1)(-3z-5)\\ &=-(z-1)(3z+5)\geq 0 \end{aligned}$$

$\therefore -\dfrac{5}{3}\leq z\leq 1$

ゆえに，$z$ の最小値は $-\dfrac{5}{3}$ z

**44**

$$\begin{aligned} \frac{x^4-2x^3+2x^2-x+4}{x^2-x+1}&=\frac{x^2\left(x^2-x+1\right)-x\left(x^2-x+1\right)+4}{x^2-x+1}\\ &=x^2-x+\frac{4}{x^2-x+1}\\ &=x^2-x+1+\frac{4}{x^2-x+1}-1 \end{aligned}$$

ここで，$x^2-x+1+\dfrac{4}{x^2-x+1}$ について，

$x^2-x+1=\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}>0$ より，相加平均 $\geq$ 相乗平均が成り立つから，

$$\begin{aligned} x^2-x+1+\frac{4}{x^2-x+1}&\geq 2\sqrt{\left(x^2-x+1\right)\cdot\frac{4}{x^2-x+1}}\\ &=4 \end{aligned}$$

よって，

$$\begin{aligned} \frac{x^4-2x^3+2x^2-x+4}{x^2-x+1}&=\left(x^2-x+1+\frac{4}{x^2-x+1}\right)-1\\ &\geq 3 \end{aligned}$$

等号成立は$x^2-x+1=\dfrac{4}{x^2-x+1}$のとき，すなわち$\left(x^2-x+1\right)^2=4$のときである。

このとき，$x^2-x+1>0$より，$x^2-x+1=2$すなわち$x^2-x-1=0$

これを解くと，$x=\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$（実数）

ゆえに，$x=\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$で最小値 3 をとる。

**45**

**(1)**

$4x+3y=7$より，$y=\dfrac{7-4x}{3}$　・・・①

$y\geq 0$より，$7-4x\geq 0$

これと$x\geq 0$より，$0\leq x\leq \dfrac{7}{4}$　・・・②

また，①より，

$$xy=-\frac{1}{3}\left(4x^2-7x\right)$$
$$=-\frac{4}{3}\left(x-\frac{7}{8}\right)^2+\frac{49}{48}$$

これと②より，$xy$は$x=\dfrac{7}{8}$で最大値$\dfrac{49}{48}$，$x=0,\ \dfrac{7}{4}$で最小値 0 をとる。

**(2)**

$$\begin{aligned}x^2y^2-16x^2-9y^2-26xy&=(xy)^2-(4x+3y)^2-2xy\\&=(xy)^2-2xy-49\\&=(xy-1)^2-50\end{aligned}$$

(1)より，$0\leq xy\leq \dfrac{49}{48}$だから，$xy=0$で最大値$-49$，$xy=1$で最小値$-50$をとる。

**46**

$\dfrac{x^2+4x+1}{x^2+x+1}=k$とおき，両辺に$x^2+x+1$を掛け，さらに$x$について整理すると，

$(k-1)x^2+(k-4)x+k-1=0$

これを$x$についての方程式とし，この方程式について，

$k=1$のとき

　$x=0$（実数）

$k\neq 1$のとき

　実数$x$が存在するためには，判別式を$D$とすると，

実数解条件より，

$$
\begin{aligned}
D &= (k-4)^2 - 4(k-1)^2 \\
&= \{(k-4)+2(k-1)\}\{(k-4)-2(k-1)\} \\
&= -3(k-2)(k+2) \geq 0
\end{aligned}
$$

$\therefore -2 \leq k < 1,\ 1 \leq k \leq 2$

以上より，$k$ すなわち $\dfrac{x^2+4x+1}{x^2+x+1}$ のとりうる値の範囲は $-2 \leq \dfrac{x^2+4x+1}{x^2+x+1} \leq 2$

**47**

**(1)**

$k = \dfrac{x}{y}$ より，$x = ky$

これを $x^2+y^2-4y+2=0$ に代入し $y$ について整理すると，

$y$ についての 2 次方程式 $(k^2+1)y^2-4y+2=0$ となる。

この方程式は実数解をもつから，判別式を $D$ とすると，

実数解条件より，$\dfrac{D}{4} = 4-(k^2+1)\cdot 2 = -2(k^2-1) = -2(k+1)(k-1) \geq 0$　$\therefore -1 \leq k \leq 1$

$$
\begin{aligned}
z &= \frac{x^2+4xy+9y^2}{xy+2y^2} \\
&= \frac{y^2\left\{\left(\dfrac{x}{y}\right)^2 + 4\cdot\dfrac{x}{y} + 9\right\}}{y^2\left(\dfrac{x}{y}+2\right)} \\
&= \frac{\left(\dfrac{x}{y}\right)^2 + 4\cdot\dfrac{x}{y} + 9}{\dfrac{x}{y}+2} \\
&= \frac{k^2+4k+9}{k+2}
\end{aligned}
$$

**(2)**

$$
\begin{aligned}
z &= \frac{k^2+4k+9}{k+2} \\
&= \frac{(k+2)^2+5}{k+2} \\
&= k+2+\frac{5}{k+2}
\end{aligned}
$$

$-1 \leq k \leq 1$ より，$k+2>0$

よって，相加平均 $\geq$ 相乗平均が成り立つから，

$z = k + 2 + \dfrac{5}{k+2} \geq 2\sqrt{(k+2)\cdot\dfrac{5}{k+2}} = 2\sqrt{5}$

等号成立条件

$k + 2 = \dfrac{5}{k+2}$ より，$(k+2)^2 = 5$

これと $1 \leq k + 2 \leq 3$ より，$k + 2 = \sqrt{5}$

よって，$k = -2 + \sqrt{5}$ のとき等号が成立する。

以上より，$z$ は，$k = -2 + \sqrt{5}$ のとき，最小値 $2\sqrt{5}$ をとる。

**48**

**(1)**

$x \leq a$ のとき

$f(x) = x^2 + x - a^3 + 2a = \left(x + \dfrac{1}{2}\right)^2 - a^2 + 2a - \dfrac{1}{4}$ ・・・①

$a \leq x$ のとき

$f(x) = x^2 - x - a^3 + 4a = \left(x - \dfrac{1}{2}\right)^2 - a^2 + 4a - \dfrac{1}{4}$ ・・・②

また，①と②は $x = a$ のとき共有点をもつ。すなわち $x = a$ で連続である。 ・・・③

$a < -\dfrac{1}{2}$ のとき

①は $x \leq a$ で単調に減少し，②は $a \leq x \leq \dfrac{1}{2}$ で単調に減少し，$\dfrac{1}{2} \leq x$ で単調に増加する。

これと③より，$m(a) = -a^2 + 4a - \dfrac{1}{4}$

$\dfrac{1}{2} < a$ のとき

①は $x \leq -\dfrac{1}{2}$ で単調に減少し，$\dfrac{1}{2} \leq x \leq a$ で単調に増加する。

②は $a \leq x$ で単調に増加する。

これと③より，$m(a) = -a^2 + 2a - \dfrac{1}{4}$

$-\dfrac{1}{2} \leq a \leq \dfrac{1}{2}$ のとき

①は $x \leq -\dfrac{1}{2}$ で単調に減少し，$\dfrac{1}{2} \leq x \leq a$ で単調に増加する。

②は $a \leq x \leq \dfrac{1}{2}$ で単調に減少し，$\dfrac{1}{2} \leq x$ で単調に増加する。

よって，$-a^2+2a-\frac{1}{4}$ と $-a^2+4a-\frac{1}{4}$ のうち小さい方が最小値となる。

$-a^2+2a-\frac{1}{4}<-a^2+4a-\frac{1}{4}$ となるのは，$2a>0$ より，$a>0$ のときだから，

$-\frac{1}{2}\leq a<0$ のとき

$$m(a)=-a^2+4a-\frac{1}{4}$$

$a=0$ のとき

$$m(a)=-\frac{1}{4}$$

$0<a\leq\frac{1}{2}$ のとき

$$m(a)=-a^2+2a-\frac{1}{4}$$

以上より，

$a<0$ のとき

$$m(a)=-a^2+4a-\frac{1}{4}$$

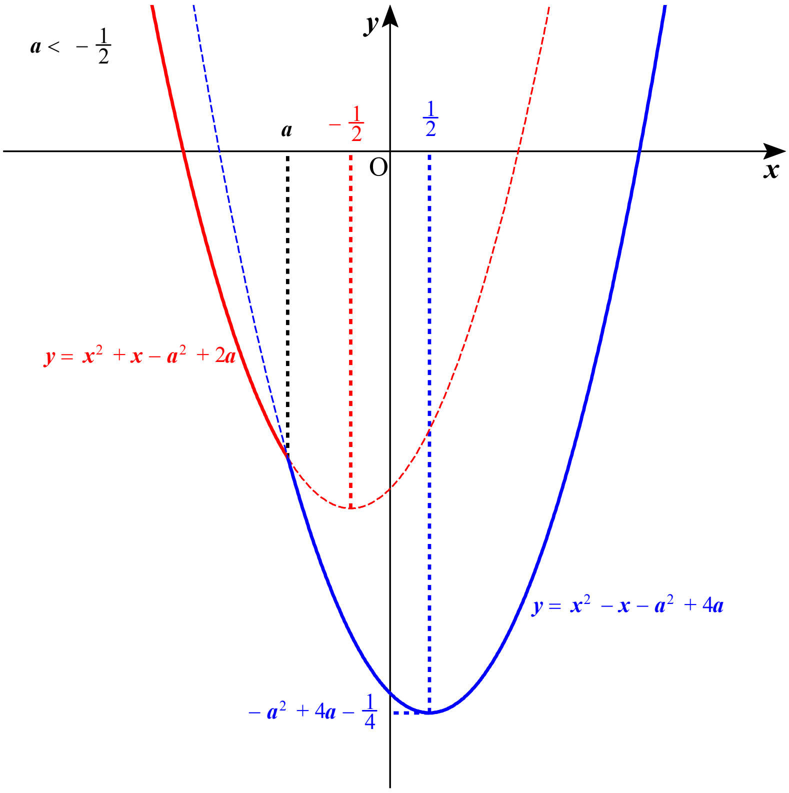
$a=0$ のとき

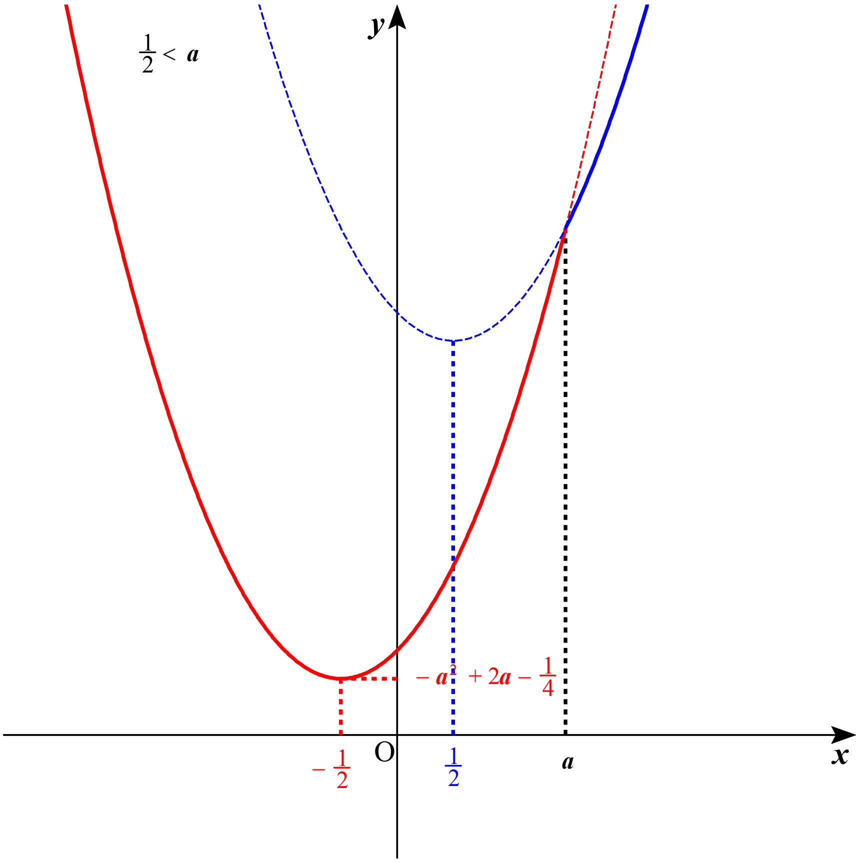
$$m(a)=-\frac{1}{4}$$

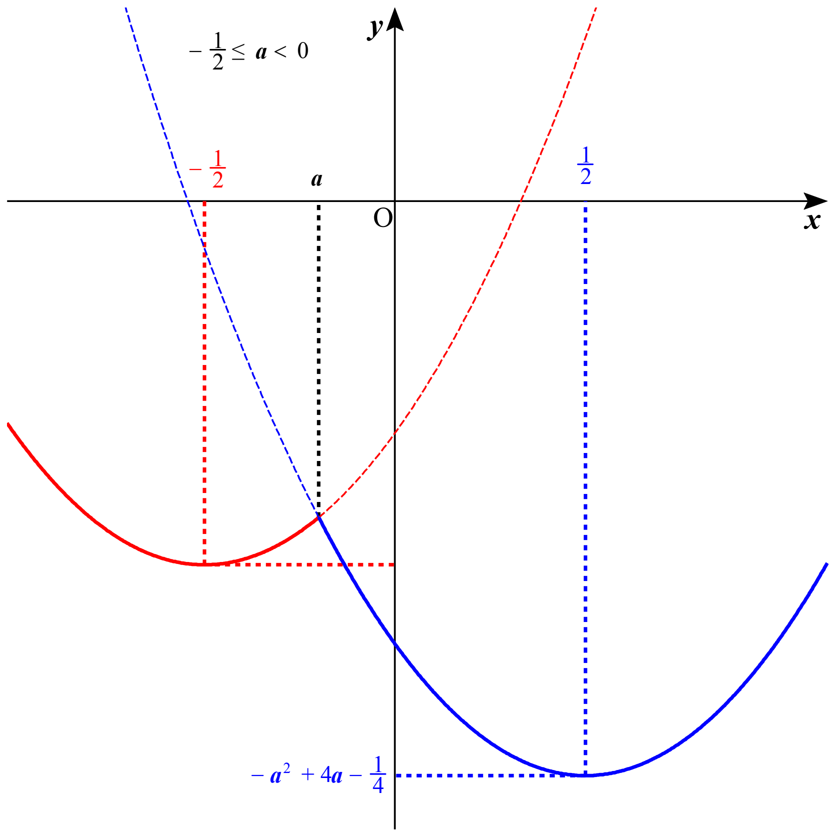
$0<a$ のとき

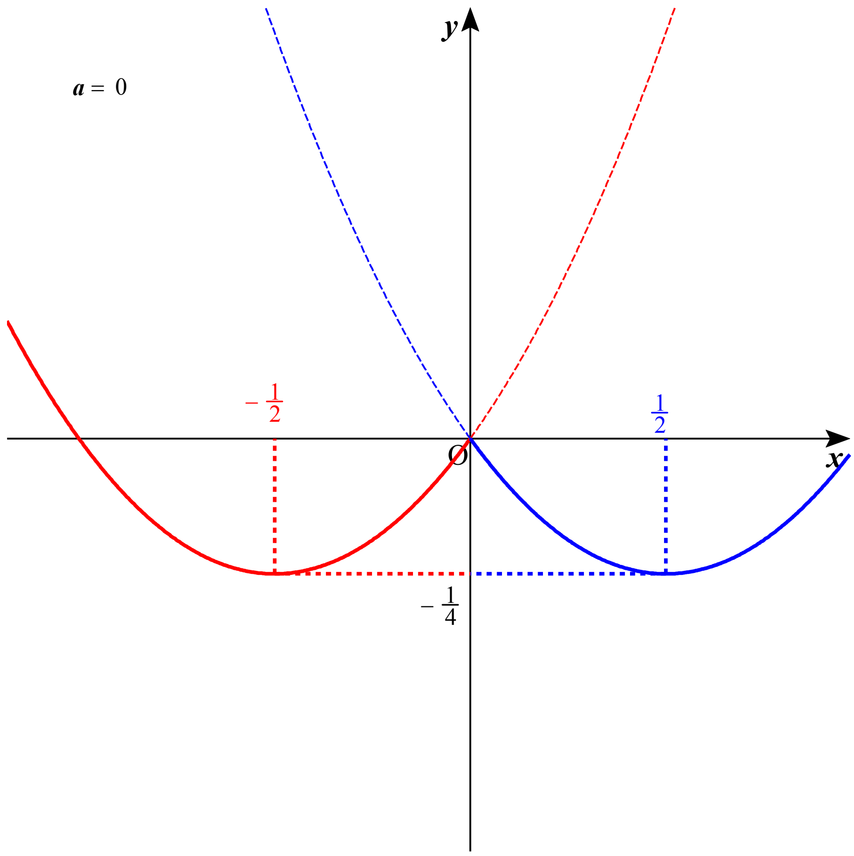
$$m(a)=-a^2+2a-\frac{1}{4}$$

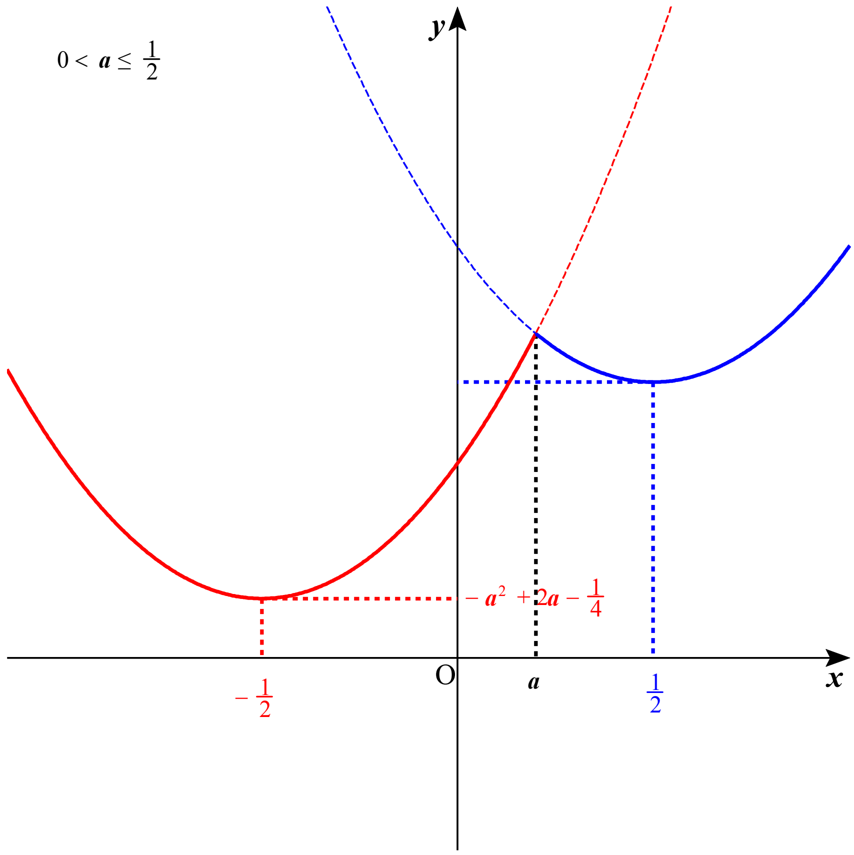
参考図


$a < -\frac{1}{2}$
$y$
$a$
$-\frac{1}{2}$
$\frac{1}{2}$
O
$x$
$y = x^2 + x - a^2 + 2a$
$y = x^2 - x - a^2 + 4a$
$-a^2 + 4a - \frac{1}{4}$


$\frac{1}{2} < a$
$y$
$-a^2 + 2a - \frac{1}{4}$
$-\frac{1}{2}$
O
$\frac{1}{2}$
$a$
$x$


$-\frac{1}{2} \leqq a < 0$
$y$
$-\frac{1}{2}$
$a$
$\frac{1}{2}$
O
$x$
$-a^2+4a-\frac{1}{4}$


$y$
$a=0$
$-\frac{1}{2}$
$\frac{1}{2}$
O
$x$
$-\frac{1}{4}$




**(2)**

$m(a)$ は $a=0$ で連続であり，$m(0)=-\dfrac{1}{4}$

$a<0$ のとき

$m(a)=-a^2+4a-\dfrac{1}{4}=-(a-2)^2+\dfrac{15}{4}$ より，$m(a)$ は単調増加

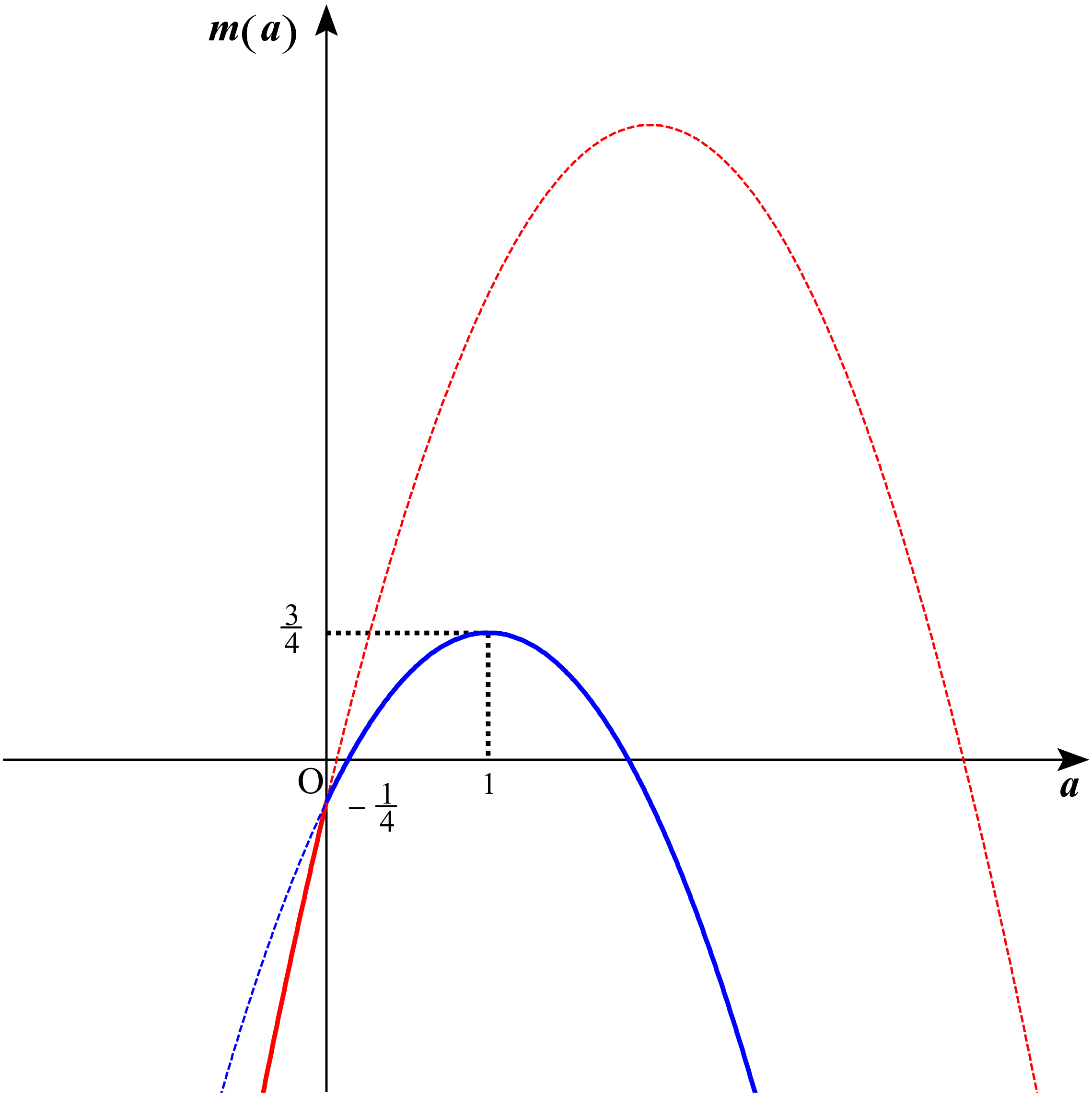
$0<a$ のとき

$m(a)=-a^2+2a-\dfrac{1}{4}=-(a-1)^2+\dfrac{3}{4}$ より，

$0<a\leq 1$ で単調増加，$1\leq a$ で単調減少

よって，$a=1$ で最大値 $\dfrac{3}{4}$ をとる。

参考図



**49**

$$f(x)=\left|x^2+3bx-\frac{b}{4}\right|$$
$$=\left|\left(x+\frac{3}{2}b\right)^2-\frac{b(9b+1)}{4}\right|$$

より，

$-\dfrac{b(9b+1)}{4}\leq 0$ のとき，すなわち $b\leq -\dfrac{1}{9}$, $0\leq b$ のとき $f(x)$ の最小値は 0

$-\dfrac{b(9b+1)}{4}>0$ のとき，すなわち $-\dfrac{1}{9}<b<0$ のとき $f(x)$ の最小値は $-\dfrac{b(9b+1)}{4}$

よって， $f(x)$ の最小値を $m_f(b)$ とすると，

$$m_f(b)=\begin{cases}0 & \left(b\leq -\dfrac{1}{9},\ 0\leq b\right)\\ -\dfrac{b(9b+1)}{4} & \left(-\dfrac{1}{9}<b<0\right)\end{cases}\quad\cdot\cdot\cdot ①$$

$$g(x)=\begin{cases}\left(x-\dfrac{3}{2}b\right)^2-\dfrac{b(9b+1)}{4} & (x<0)\\ \left(x+\dfrac{3}{2}b\right)^2-\dfrac{b(9b+1)}{4} & (0\leq x)\end{cases}$$

より，

$\dfrac{3}{2}b<0$ のとき，すなわち $b<0$ のとき $x=\dfrac{3b}{2}$, $-\dfrac{3}{2}b$ で最小値 $-\dfrac{b(9b+1)}{4}$ をとる。

$\dfrac{3}{2}b=0$ のとき，すなわち $b=0$ のとき $x=0$ で最小値 0 をとる。

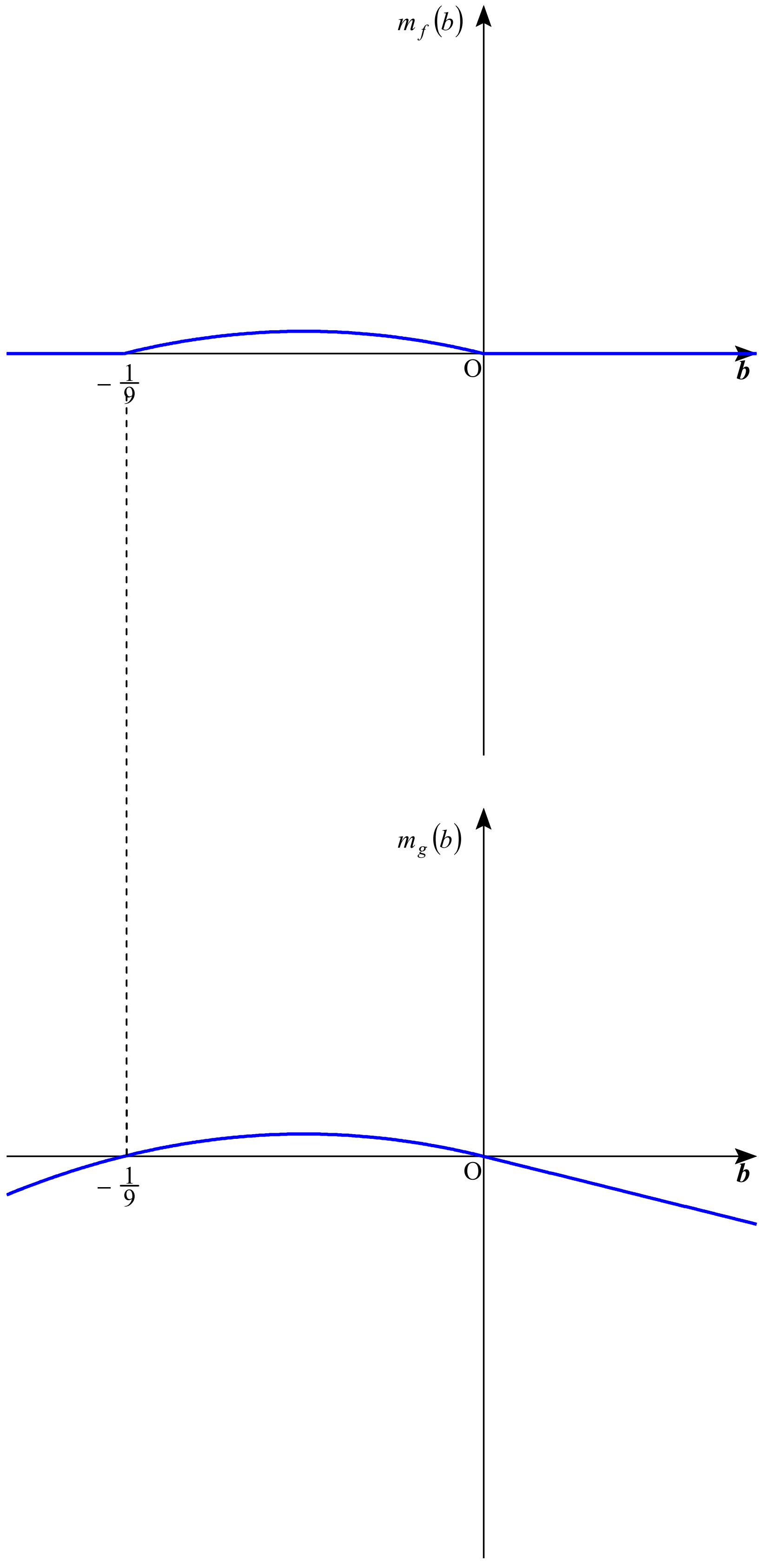
$\dfrac{3}{2}b>0$ のとき，すなわち $b>0$ のとき $x=0$ で最小値 $-\dfrac{b}{4}$ をとる。

よって， $g(x)$ の最小値を $m_g(b)$ とすると，

$$m_g(b)=\begin{cases}-\dfrac{b(9b+1)}{4} & (b<0)\\ 0 & (b=0)\\ -\dfrac{b}{4} & (0<b)\end{cases}\quad\cdot\cdot\cdot ②$$

①，②それぞれをグラフで表すと，次のようになる。

よって，グラフより，最小値が一致するような $b$ の範囲は $-\dfrac{1}{9}\leq b\leq 0$


$m_f(b)$
$-\frac{1}{9}$
O
$b$
$m_g(b)$
$-\frac{1}{9}$
O
$b$